Master 3I : Méthodes numériques
Éléments de mathématiques du signal

David Viennot

6 décembre 2007

Table des matières

Chapitre 1

Les signaux

1.1 Nature des signaux

Définition 1. *Un signal est une grandeur physique susceptible de varier dans le temps ou dans l'espace.*

Deux exemples importants de signaux :

- les signaux acoustiques : physiquement il s'agit d'ondes de compression-décompression de l'air. Il s'agit donc d'une quantité physique qui varie dans l'espace et dans le temps : $f(x,t)$ (pour simplifier l'axe (Ox) est considéré comme la direction de propagation, la source est ponctuelle et située sur cet axe). Souvent, on ne considère le son qu'à l'endroit de son émission ou de sa réception x_0, dans ce cas le son se ramène à un simple signal temporel $g(t) = f(x_0, t)$.
- les signaux optiques : physiquement il s'agit d'ondes électromagnétiques. Il s'agit donc également d'une quantité physique qui varie dans l'espace et dans le temps : $f(x,y,z,t)$ (ici (Oz) est la direction de propagation et le plan (Oxy) est le "plan de l'image"). On s'intéresse en général à la perception des images en un point x_0, ramenant le problème pour une image fixe à un signal spatial $g(x,y) = f(x,y,z_0)$.

Ces deux types de signaux sont des signaux ondulatoires, qui se présentent sous la forme générale :

$$f(t) = \int_0^{+\infty} E(\omega,t)\mathfrak{P}(\omega t + \phi(\omega,t))d\omega$$

pour un signal ne dépendant que de t, ou

$$f(x,y,t) = \int_0^{+\infty} E(x,y,\omega,t)\mathfrak{P}(\omega t + \phi(x,y,\omega,t))d\omega$$

pour une image, où dans les deux cas $\mathfrak{P}$ est une fonction 2π-périodique. Afin d'analyser les différents éléments constitutifs des signaux, considérons les cas limites les plus simples et en premier lieu, les signaux de la forme (pour simplifier on ne fera plus de référence à la dépendance à x, y) :

$$f(t) = E\mathfrak{P}(\omega t + \phi) \qquad E \in \mathbb{R}^+, \omega \in \mathbb{R}^{+*}, \phi \in [0, 2\pi[$$

E est appelé amplitude du signal, ω la pulsation du signal et ϕ la phase. On introduit également T la période du signal et ν sa fréquence sachant que

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

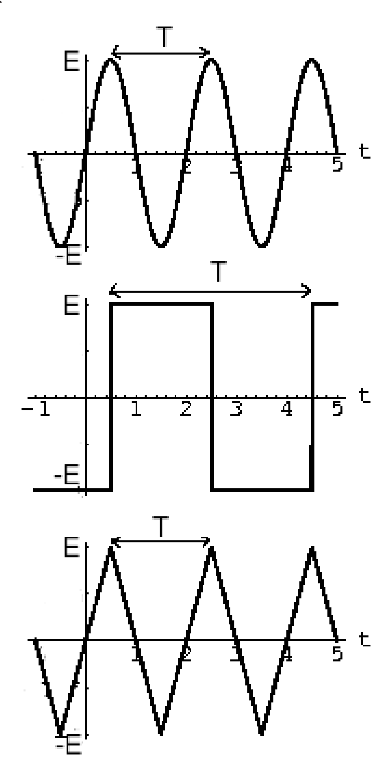
On distingue alors les signaux en fonction de la fonction $\mathfrak{P}$, les signaux les plus fréquents étant :

- les signaux sinusoïdaux : $E\mathfrak{P}(\omega t + \phi) = E\cos(\omega t + \phi)$ (les signaux optiques sont toujours de cette nature).
- les signaux créneaux :

$$\mathfrak{P}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[,\ k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \in]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

– les signaux triangulaires :

$$\mathfrak{P}(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}t + 1 + 4k & \text{si } x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{2}{\pi}t - 3 - 4k & \text{si } x \in]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



De fait, on peut "fabriquer" un signal à partir de n'importe quelle fonction $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ en posant que $\mathfrak{P}$ est obtenue en reproduisant g sur toutes les périodes. *Pour simplifier à partir de ce point, on ne considérera dans ce paragraphe que des signaux sinusoïdaux.*

Des signaux plus complexes et plus riches sont obtenus quand les constantes des signaux précédents, sont modulés dans le temps :

– modulation d'amplitude :
$$f(t) = E(t)\cos(\omega t + \phi)$$
– modulation de fréquence :
$$f(t) = E\cos(\omega(t)t + \phi)$$
– modulation de phase :
$$f(t) = E\cos(\omega t + \phi(t))$$

On notera que modulation de phase et modulation de fréquence sont équivalentes, considérant une fréquence moyenne ω_0 et $\phi_0 = \phi(0)$, on passe d'un cas à l'autre en posant[1]

$$\phi(t) = (\omega(t) - \omega_0)t + \phi_0$$
$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{\phi(t) - \phi_0}{t}$$

on a alors

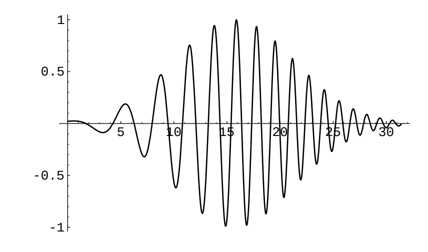
$$\omega(t)t + \phi_0 = \omega_0 t + \phi(t)$$

Les signaux les plus intéressants présentent simultanément une modulation d'amplitude et une modulation de fréquence :

$$f(t) = E(t)\cos(\omega(t)t + \phi)$$

La fonction $t \mapsto E(t)$ est alors appelée enveloppe du signal et la fonction $t \mapsto \cos(\omega(t)t + \phi)$ est appelée porteuse du signal.

[1] on suppose que ϕ est une fonction dérivable, on note donc que $\omega(0) = \omega_0 + \phi'(0)$.



On notera que la fonction $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ reproduite périodiquement pour construire $\mathfrak{P}$, la fonction $t \mapsto E(t)$ et $t \mapsto \omega(t)$ peuvent être des processus aléatoires (la valeur de ces fonctions en un point t est alors déterminée par une loi de probabilités). C'est le cas des signaux bruités.

Deux signaux peuvent être superposés (par exemple s'ils sont issus de deux sources), on a alors comme signal résultant :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = E_1(t)\cos(\omega_1(t) + \phi_1) + E_2(t)\cos(\omega_2(t) + \phi_2)$$

enfin on peut superposer une "infinité" de signaux :

$$f(t) = \int_0^\infty E_\sigma(t)\cos(\omega_\sigma(t)t + \phi_\sigma)d\sigma$$

en faisant le changement de variables suivant :

$$\phi(\omega, t) = (\omega_\sigma(t) - \omega)t + \phi_\sigma$$

$$E(\omega, t) = E_\sigma(t)$$

$$\omega = \sigma$$

on a

$$f(t) = \int_0^\infty E(\omega, t)\cos(\omega t + \phi(\omega, t))d\omega$$

et on retrouve l'expression générale des signaux ondulatoires donnée en début de paragraphe.

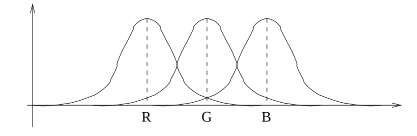
1.2 Perception des signaux

1.2.1 Perception des fréquences

Le situation est assez simple pour les signaux électromagnétiques, seuls des signaux de fréquences comprises entre 4.10^{13} et 7.10^{13} Hz sont perçus par l'œil. Les différentes fréquences correspondent aux couleurs :

IR	rouge	orange	jaune	vert	bleu	violet	UV	
< 4	4 à 4.8	4.8 à 5.1	5.1 à 5.3	5.3 à 5.8	5.8 à 6.9	6.9 à 7.9	> 7.9	$\times 10^{13}$ Hz

On notera que la couleur blanche correspond à une superposition de signaux dont les fréquences correspondent à tout le spectre visible. Physiquement, on ne perçoit en réalité que 3 couleurs "primaires" : rouge, vert et bleu ; la réponse des récepteurs optiques étant de type gaussien centrée sur ces couleurs :



Le recouvrement des réponses aux signaux permet au cerveau de reconstituer toute couleur à partir de l'amplitude de stimulation des trois types de détecteur de l'œil. Ceci permet également de construire n'importe quelle couleur (en perception) à partir d'une superposition de trois signaux de fréquences correspondantes aux trois couleurs primaires.

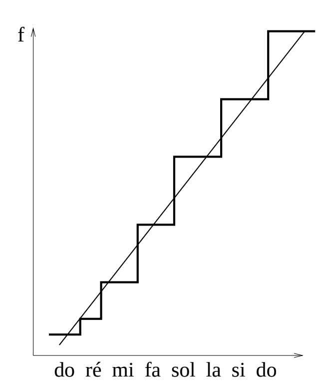
Au niveau des signaux acoustiques, la perception de l'oreille distingue deux cas :
- des fréquences inférieures de 20 Hz sont perçues comme un rythme ;

– des fréquences au dessus de 50 Hz sont perçues comme une note.

Ainsi la description dans le domaine temporel d'un signal acoustique est tout à fait pertinente si la fréquence est perçues comme un rythme, par contre une description dans le domaine de la fréquence sera plus pertinente pour les signaux perçus comme des notes et dont l'évolution temporelle n'est pas distinguée par l'oreille. Nous reviendrons sur la description des signaux en fréquences. Les sons sont généralement classés en trois "couleurs" :

grave	médium	aigu
50 à 500 Hz	500 à 5000 Hz	5 à 20 kHz

Le continuum des fréquences acoustiques perçues par des notes est traditionnellement quantifié : on remplace ce continuum par une série de fréquences déterminées, remplaçant la "glissade chromatique continue" par un schéma en paliers :



Dans le système occidental les paliers sont appelé tons. Deux tons consécutifs sont tels que le rapport des fréquences soit

$$\frac{f_2}{f_1} \simeq \frac{9}{8}$$

Ainsi l'écart en fréquences entre deux tons consécutifs n'est pas constant et dépend de la fréquence initiale : $\frac{\Delta f}{f_1} \simeq \frac{1}{8}$. La quantification occidentale prend également en compte des demi-tons (exemple entre do et do♯ ou entre ré et ré♭), ces demi-tons sont dits chromatiques. Il y a donc entre deux notes d'un clavier (entre deux touches blanches) un ton (sauf entre le mi et le fa et entre le si et le do pour lesquels il n'y a qu'un demi-ton dit diatomique). Les demi-tons chromatiques sont portés par les touches noires. La référence (l'origine) pour cette quantification, appelée le diapason, est donné par le la du 3ème octave qui se trouve à $f_{diapason} = 440Hz$. Plus précisément, la quantification occidentale (moderne, dite "gamme tempérée") est donnée par la formule

$$f_{n_{oct},n_{ton}} = f_{diapason} \times 2^{n_{oct}-3+\frac{n_{ton}-10}{12}}$$

où $n_{oct} \in \mathbb{Z}$ est le numéro de l'octave et $n_{ton} = 1, ..., 12$ est le numéro de la note :

note	do	do♯ ré♭	ré	ré♯ mi♭	mi	fa	fa♯ sol♭	sol	sol♯ la♭	la	la♯ si♭	si
n_{ton}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_{3,n_{ton}}$ (Hz)	261.63	277.18	293.66	311.13	329.63	349.23	369.99	392	415.3	440	466.16	493.88

Le traitement numérique des signaux nécessite aussi une quantification (soit en fréquence , soit en temps) du fait que les systèmes informatiques doivent représenter les signaux par des séries de 0 et de 1. Les problèmes de représentation discrète des signaux sera vu ultérieurement dans ce cours. Il reste intéressant de noter que la représentation des signaux acoustiques perçus en fréquence par un système physique limité tel un instrument de musique (avec un nombre fini de cordes ou de chambres de résonances) et par un système informatique ne diffèrent que très peu.

1.2.2 Perception de l'amplitude et de l'enveloppe

L'œil comme l'oreille ne sont par directement sensibles à l'amplitude d'un signal mais à son intensité. Celle-ci dans le cas simple d'un signal monochromatique $f(t) = E\cos(\omega t + \phi)$ est $I = E^2$. Afin que cette opération passant du signal f à son intensité soit clairement définie, il est utile de passer à des notations complexes ($\imath^2 = -1$) :

$$f(t) = Ee^{\imath(\omega t+\phi)}$$

Le signal “réel” étant obtenu comme la partie réelle du signal complexe. On a alors

$$I = |f(t)|^2$$

Cette “notation complexe” est particulièrement utile pour représenter les effets d’interférences :

$$f(t) = E_1 e^{\imath(\omega_1 t + \phi_1)} + E_2 e^{\imath(\omega_2 t + \phi_2)}$$

$$\begin{aligned}
I(t) &= |f(t)|^2 \\
&= E_1^2 + E_2^2 + E_1 E_2 \left(e^{\imath((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2)} + e^{-\imath((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2)} \right) \\
&= I_1 + I_2 + 2E_1 E_2 \cos\left((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2\right) \\
&\neq I_1 + I_2
\end{aligned}$$

L’intensité d’une superposition de deux fréquences n’est donc pas la somme des intensités mais cette somme modulée par un terme d’interférences[2].
Cette perception de l’intensité plutôt que de l’amplitude est due au fait que les systèmes physiologiques sont sensibles à l’énergie reçue du signal. Or l’intensité est l’énergie reçue par unité de temps d’un signal. L’énergie totale portée par un signal est donc :

$$\mathcal{E}_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

On introduit également la puissance moyenne transportée par un signal :

$$\mathcal{P}_f = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

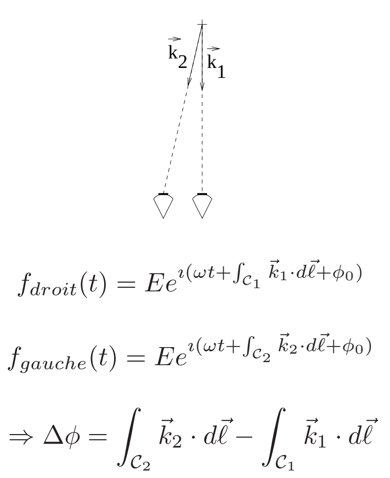
On notera enfin que les systèmes physiologiques (l’œil et l’oreille) présentent une réponse logarithmique à l’intensité des signaux. Pour augmenter la perception de la hauteur d’un signal d’une unité (une dB) il faut multiplier l’intensité du signal par 10.

Lorsqu’un son présente une modulation d’enveloppe, la perception de cette modulation est différente en fonction de la “vitesse” de cette modulation. Par exemple des modulations périodiques de fréquences de l’ordre de 10 Hz seront perçues comme des modulations périodiques de l’intensité du son (on suppose ici que les fréquences de la porteuse sont de l’ordre de 100 Hz et sont donc perçues comme des notes). De manière générale si la durée sur laquelle une modulation de l’enveloppe est significative, est très supérieure à la période de la porteuse, la modulation est perçue comme une modulation de l’intensité. Pour un instrument de musique, ce genre de modulation correspond à l’attaque de la note et à sa chute (durée d’établissement et de clôture du son). Ainsi l’attaque est très brutale pour un piano et très progressive pour un violon.
Des modulations d’enveloppe sur des durées du même ordre que la période de la porteuse ne sont plus distinguées par l’oreille comme des modulations temporelles dans l’intensité. Ces modulations sont alors perçues comme la “texture” du son : exemple entre une note de piano qui est très pure (enveloppe plate) et une note de guitare électrique (enveloppe présentant beaucoup d’oscillations).

1.2.3 Perception de la phase

La phase des signaux (optiques et acoustiques) n’est pas directement perçus. Ceci est évident puisque celle-ci est arbitraire (elle dépends du choix de l’origine $t = 0$ du temps). La phase n’est donc pas une quantité physique, par contre la différence de phase a elle un sens physique (voir par exemple la formule des interférences). Une différence de phase peut donc être perçue à condition d’avoir une réception stéréoscopique. Pour les signaux optiques, l’œil droit et l’œil gauche reçoivent ainsi d’un même point chacun un signal qui ne se différencie que par leurs phases, celles-ci dépendent du chemin parcouru par le signal :

[2]on notera qu’il est possible de se passer des notations complexes pour représenter le phénomène d’interférences, néanmoins celui-ci présente une structure mathématique identique à celle des nombres complexes : $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(\overline{z_1} z_2)$. Le modèle naturel des signaux est donc bien construit sur les nombres complexes et pas sur les nombres réels.



$$f_{droit}(t) = Ee^{\imath(\omega t + \int_{\mathcal{C}_1} \vec{k}_1 \cdot d\vec{\ell} + \phi_0)}$$

$$f_{gauche}(t) = Ee^{\imath(\omega t + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{k}_2 \cdot d\vec{\ell} + \phi_0)}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{k}_2 \cdot d\vec{\ell} - \int_{\mathcal{C}_1} \vec{k}_1 \cdot d\vec{\ell}$$

Plus le point source est loin moins la différence entre les chemins parcourus est grande et donc plus la différence de phase gauche/droite est faible. Ainsi le cerveau interprète la différence de phase comme une mesure de la distance de la source ; ce qui permet la vision à 3 dimensions.

Pour les signaux acoustiques le principe est le même, différence de phase et intensité des signaux entre les oreilles droite et gauche permettent de repérer la position spatiale de la source. Néanmoins ce système physiologique est moins efficace que pour les signaux optiques (d'où la multiplication de systèmes audio 5.1 remplaçant les systèmes stéréo classiques).

1.3 Structure mathématique de l'espace des signaux et distributions

1.3.1 L'espace des signaux physiques $L^2(\mathbb{R}, dt)$

On a vu qu'un signal est représenté par une fonction du temps à valeurs dans $\mathbb{C}$ (afin de représenter les interférences). De plus on doit pouvoir additionner deux fonctions représentant des signaux (pour les superposer). Et enfin, on a vu que l'intégrale du module carré représentait l'énergie portée par un signal, celle-ci devant être finie, les fonctions doivent être de carré sommable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

Définition 2. *L'ensemble des fonctions à valeurs complexes de carré sommable, muni d'une structure d'espace vectoriel (addition des fonctions et multiplication d'une fonction par un scalaire) et de la norme :*

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}$$

est noté $L^2(\mathbb{R}, dt)$ (après avoir identifié les fonctions qui ne se différencient que pour un nombre fini de points).

$L^2(\mathbb{R}, dt)$ est un espace de Hilbert, c'est à dire que si on se donne une suite de signaux $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la différence entre deux signaux consécutifs devient nulle à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{n+1} - f_n\| = 0$$

alors il existe un signal limite $f(t) \in L^2(\mathbb{R}, dt)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$$

1.3.2 Perception intégrée et signaux réalistes

Un détecteur de signaux réaliste ne détecte pas un signal instantanément, mais intègre le signal sur une période T :

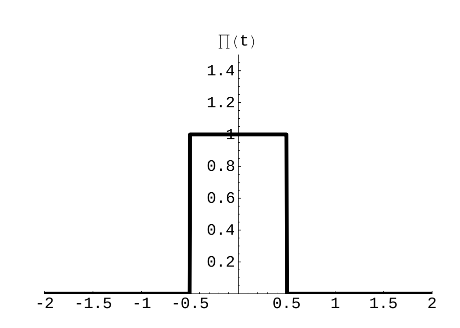
$$f(t) \to f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^T f(t')dt' & \text{si } t \in [T, 2T] \\ \frac{1}{T}\int_T^{2T} f(t')dt' & \text{si } t \in [2T, 3T] \\ \frac{1}{T}\int_{2T}^{3T} f(t')dt' & \text{si } t \in [3T, 4T] \\ \dots \end{cases}$$

De plus la réponse du récepteur sur une période de réception n'est pas nécessairement plane, mais peut être une fonction. D'une manière générale, un système de réception intégratif est représenté par une fonction g telle que le résultat de la perception est

$$\langle g|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} f(t)dt$$

Une réponse plane est donnée par la fonction porte :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



dans ce cas, on intègre le signal sur une fenêtre :

$$\langle \Pi|f\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)dt$$

Les fonctions qui représentent donc les réponses des systèmes à un signal sont elles-mêmes des signaux, mais qui appartiennent à une classe plus réduite que L^2. En effet se sont des fonctions à support borné (c'est à dire qu'il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $f(t) = 0\ \forall t < a$ et $\forall t > b$). On note cet ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}, dt)$. Les fonctions à support borné sont en fait les signaux réalistes du point de vue physique, a représentant la date de début d'émission du signal et b la fin de l'émission. Alors que dans L^2 se trouve des signaux qui sont émis depuis toujours ($t \to -\infty$) et dont l'émission ne s'arrête jamais $t \to +\infty$.

1.3.3 Idéalisation des signaux

Considérons les fonctions

$$\Pi_n(t) = n\Pi(nt) = \begin{cases} n & \text{si } |t| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce sont des signaux réalistes ($\Pi_n \in \mathcal{D}$) correspondant à une fenêtre d'intégration qui devient de plus en plus faible avec n. Un signal $f \in L^2$ est donc intégré comme

$$\langle \Pi_n|f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_n(t)f(t)dt = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} nf(t)dt = n\left(F(\frac{1}{2n}) - F(-\frac{1}{2n})\right)$$

où F est une primitive de f.
En faisant tendre n vers l'infini, on a une fenêtre qui devient de plus en plus faible pour se concentrer sur le point $t = 0$. On peut donc penser qu'en intégrant le signal sur une fenêtre de plus en plus courte, le résultat

tende vers la valeur du signal en 0. En effet :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle \Pi_n | f \rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_n(t) f(t) dt \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(F(1/(2n)) - F(-1/(2n)) \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F(0+h/2) - F(0-h/2)}{h} \\
&= F'(0) \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

Un système parfait (la limite $n \to \infty$) qui mesure le signal à l'instant $t = 0$ devrait donc correspondre à :

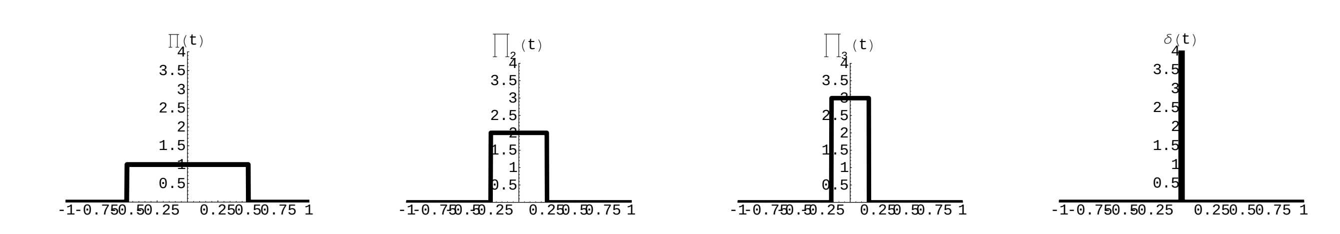
$$\langle \delta | f \rangle = f(0)$$

où δ serait la "fonction" du signal impulsionnel que l'on obtiendrait si on pouvait intervertir la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_n(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt$$

Bien entendu la limite et l'intégrale ne peuvent pas être interverties, et l'objet δ n'est pas une fonction ("$\delta(t) = 0\ \forall t \neq 0$" et "$\delta(0) = \infty$").
L'objet δ est ce que l'on appelle une distribution (δ est la distribution de Dirac), et on dit que δ est la limite faible de Π_n :

$$\text{w-}\lim_{n\to\infty} \Pi_n(t) = \delta(t) \iff \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_n(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad \forall f \in L^2$$



L'ensemble des distributions (ensemble des limites faibles des signaux réalistes) est noté $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, dt)$. Le passage des fonctions aux distributions (des fonctions généralisées avec des propriétés étranges comme δ) traduit le fait que l'on procède à une idéalisation (aucun système physique réel ne présente un signal impulsionnel mais au mieux un signal émis sur une fenêtre temporelle faible).
Notons que les signaux fondamentaux que l'on a considérés dans la section précédente $f(t) = Ee^{\imath(\omega t+\phi)}$ ne sont pas des signaux physiques puisque $\|f\| = +\infty$ mais des idéalisations de signaux du type $f_n(t) = \Pi(t/n)Ee^{\imath(\omega t+\phi)}$ pour lesquels :

$$\|f_n\|^2 = \int_{-n/2}^{n/2} E^2 dt = nE^2 < \infty$$

$$\text{w-}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

Ces signaux idéalisées sont donc des distributions particulières, assimilables à des fonctions qui ne sont pas de carrée sommable (signaux transportant une énergie infinie) que l'on appelle des distributions régulières (les distributions qui ne peuvent pas être assimilées à des fonctions comme δ sont appelées singulières).
Lorsque l'on veut une impulsion en point t_0 différant de 0, on utilise la distribution $\delta_{t_0}(t) = \delta(t - t_0)$:

$$\langle \delta_{t_0} | f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0), \quad \forall f \in L^2$$

Chapitre 2

Dualité temps-fréquence : série et transformée de Fourier

Comme on l'a vu, les signaux peuvent être perçus soit en temps soit en fréquence. Il est donc nécessaire de pouvoir représenter en temps t (en s) et en fréquence ν (en s^{-1} = Hz) et de pouvoir passer de l'un à l'autre. C'est le but de ce chapitre.

2.1 Série de Fourier d'un signal périodique

Considérons un signal périodique élémentaire :

$$f(t) = Ee^{\imath(\omega t+\phi)}$$

Il est clair puisque ce signal n'est composée que d'une seule fréquence $\nu_0 = \frac{\omega}{2\pi}$, que dans l'espace des fréquences le signal sera représenté par une fonction n'indiquant que la valeur ν_0, c'est à dire une distribution de Dirac :

$$f(t) = Ee^{\imath(\omega t+\phi)} \leftrightarrow \hat{f}(\nu) = Ee^{\imath\phi}\delta(\nu - \nu_0)$$

Le passage de la représentation du signal en temps f à sa représentation en fréquence $\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier (on note $\hat{f}(\nu) = \mathrm{TF}[f](\nu)$ et $f(t) = \mathrm{TF}^{-1}[\hat{f}](t)$)

Pour un signal périodique quelconque, on démontre le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $t \mapsto f(t)$ une fonction T-périodique ($f(t+T) = f(t)$, $\forall t$). Alors on peut écrire f sous la forme d'une série :*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath 2\pi k\nu_0 t}$$

avec

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-\imath 2\pi k\nu_0 t}dt$$

et $\nu_0 = \frac{1}{T}$

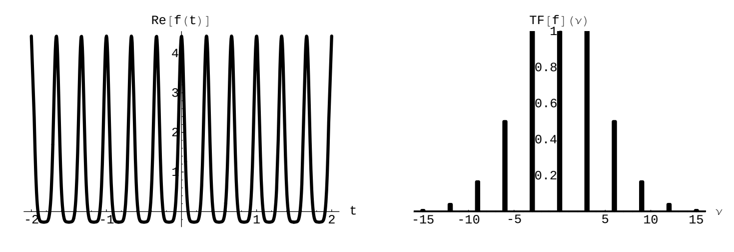
Définition 3. *Soit f une fonction T-périodique, l'ensemble des coefficients c_k de la décomposition précédente est appelé spectre en fréquences du signal f.*

La décomposition en série de Fourier décompose le signal périodique en une superposition de signaux élémentaires dont les fréquences sont des multiples de la fréquence de périodicité. Le spectre discret $\{c_k, k \in \mathbb{Z}\}$ représente ainsi le poids de chacun des signaux élémentaires dans la décomposition.
De cette décomposition, on tire la représentation en fréquences d'un signal périodique :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath 2\pi k\nu_0 t} \xrightarrow{TF} \hat{f}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(\nu - k\nu_0)$$

Définition 4. *Soit une fonction T-périodique f. $\nu_0 = \frac{1}{T}$ est appelée fréquence fondamentale de f. Les fonctions $t \mapsto c_k e^{\imath 2\pi k \nu_0 t}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, sont appelées harmoniques de f. $|c_k|^2$ est le poids de la k-ième harmonique dans le signal f.*

Dans un son, c'est la présence et le poids relatif des différentes harmoniques qui modifie le timbre (ce qui différencie un La 440 Hz d'une guitare, du même La d'une flûte).



Partie réelle de $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|k|!} e^{\imath 2\pi k 3t}$ et $\hat{f}(\nu)$

2.2 Transformée de Fourier d'un signal quelconque

Lorsqu'un signal présente une périodicité, on a vu que l'on pouvait représenter celui-ci à l'aide d'une somme discrète sur les signaux élémentaires $e^{\imath 2\pi\nu t}$ pour les fréquences ν multiples de la fréquence fondamentale. En l'absence de périodicité, il est clair que le signal ne va se décomposer sur un ensemble discret de fréquences mais sur tout le continuum. En utilisant une décomposition sur tous les signaux élémentaires, on trouve la définition générale de la transformée de Fourier :

Définition 5. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, dt)$, on définit la transformée de Fourier du signal f par*[1]

$$\hat{f}(\nu) = \mathrm{TF}[f](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\imath 2\pi\nu t} dt$$

avec

$$f(t) = \mathrm{TF}^{-1}[\hat{f}](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{\imath 2\pi\nu t} d\nu$$

Dans ce cas, le spectre en fréquences de f est la fonction $\nu \mapsto \hat{f}(\nu)$.

Théorème 2 (Formule de Parceval-Plancherel)**.** *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}, dt)$ deux signaux. Alors on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(t)} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{g}(\nu)} \hat{f}(\nu) d\nu$$

$$\iff \langle g|f\rangle = \langle \hat{g}|\hat{f}\rangle$$

De la formule de Parceval-Plancherel on tire que l'énergie totale transportée par un signal, peut être calculée soit à partir de sa représentation en temps soit à partir de sa représentation en fréquence :

$$\mathcal{E}_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$$

On a déjà dit que $t \mapsto |f(t)|^2$ était la densité d'énergie par unité de temps transportée par le signal. La fonction $\nu \mapsto S_f(\nu) = |\hat{f}(\nu)|^2$ est l'énergie par unité de fréquence transportée par le signal. Autrement dit $S_f(\nu) d\nu = |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$ est l'énergie transportée dans les fréquences de ν à $\nu + d\nu$ par le signal.

Définition 6. *On appelle la fonction $\nu \mapsto S_f(\nu) = |\hat{f}(\nu)|^2$ densité spectrale d'énergie (DSE).*

[1] en fait cette définition s'applique à $\mathcal{D}$, le domaine de l'opération TF est ensuite étendu à L^2 par propriété des limites

2.3 Propriétés des transformées de Fourier

- Linéarité :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall f, g \in L^2 \qquad \mathrm{TF}[\alpha f + \beta g](\nu) = \alpha \mathrm{TF}[f](\nu) + \beta \mathrm{TF}[g](\nu)$$

$$\iff \widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

- Transposition et conjugaison :

$$\forall f \in L^2 \quad f^T(t) = f(-t) \qquad \mathrm{TF}[f^T](\nu) = \hat{f}(-\nu)$$

$$\forall f \in L^2 \qquad \mathrm{TF}[\overline{f}](\nu) = \overline{\hat{f}(-\nu)}$$

- Changement d'échelle :

$$\forall f \in L^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^* \qquad \mathrm{TF}[f(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}(\frac{\nu}{\alpha})$$

- Translation :

$$\forall f \in L^2, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{TF}[f(t - t_0)] = e^{-\imath 2\pi\nu t_0} \hat{f}(\nu)$$

- Modulation de phase :

$$\forall f \in L^2, \quad \forall \nu_0 \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{TF}[e^{\imath 2\pi\nu_0 t} f(t)] = \hat{f}(\nu - \nu_0)$$

- Dérivations :

$$\forall f \in L^2, \qquad \mathrm{TF}[f'](\nu) = \widehat{f'}(\nu) = \widehat{\frac{df}{dt}}(\nu) = 2\imath\pi\nu \hat{f}(\nu)$$

$$\forall f \in L^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{TF}[f^{(n)}](\nu) = \widehat{f^{(n)}}(\nu) = \widehat{\frac{d^n f}{dt^n}}(\nu) = (2\imath\pi\nu)^n \hat{f}(\nu)$$

$$\forall f \in L^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(t) = (-2\imath\pi t)^n f(t) \qquad \mathrm{TF}[g] = \hat{f}^{(n)}(\nu) = \frac{d^n \hat{f}}{d\nu^n}(\nu)$$

2.4 Transformées de Fourier classiques

$f(t)$	$\mathrm{TF}(f)(\nu) = \hat{f}(\nu)$
$\Pi(t)$	$\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = \mathrm{sinc}(\pi\nu)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(\nu)$
$e^{\imath 2\pi\nu_0 t}$	$\delta(\nu - \nu_0)$
$\cos(2\pi\nu_0 t)$	$\frac{\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)}{2}$
$\sin(2\pi\nu_0 t)$	$\frac{\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0)}{2\imath}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi\nu^2}$
$e^{-\lvert\alpha\rvert t}$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}$
$\mathrm{vp}[\frac{1}{t}]$	$-\imath\pi\mathrm{sgn}(\nu)$
$\mathrm{sgn}(t)$	$-\frac{\imath}{\pi}\mathrm{vp}[\frac{1}{\nu}]$
$\mathbb{H}(t)$	$\frac{1}{2}\delta(\nu) - \frac{\imath}{2\pi}\mathrm{vp}[\frac{1}{\nu}]$

la fonction signe étant définie par

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ +1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

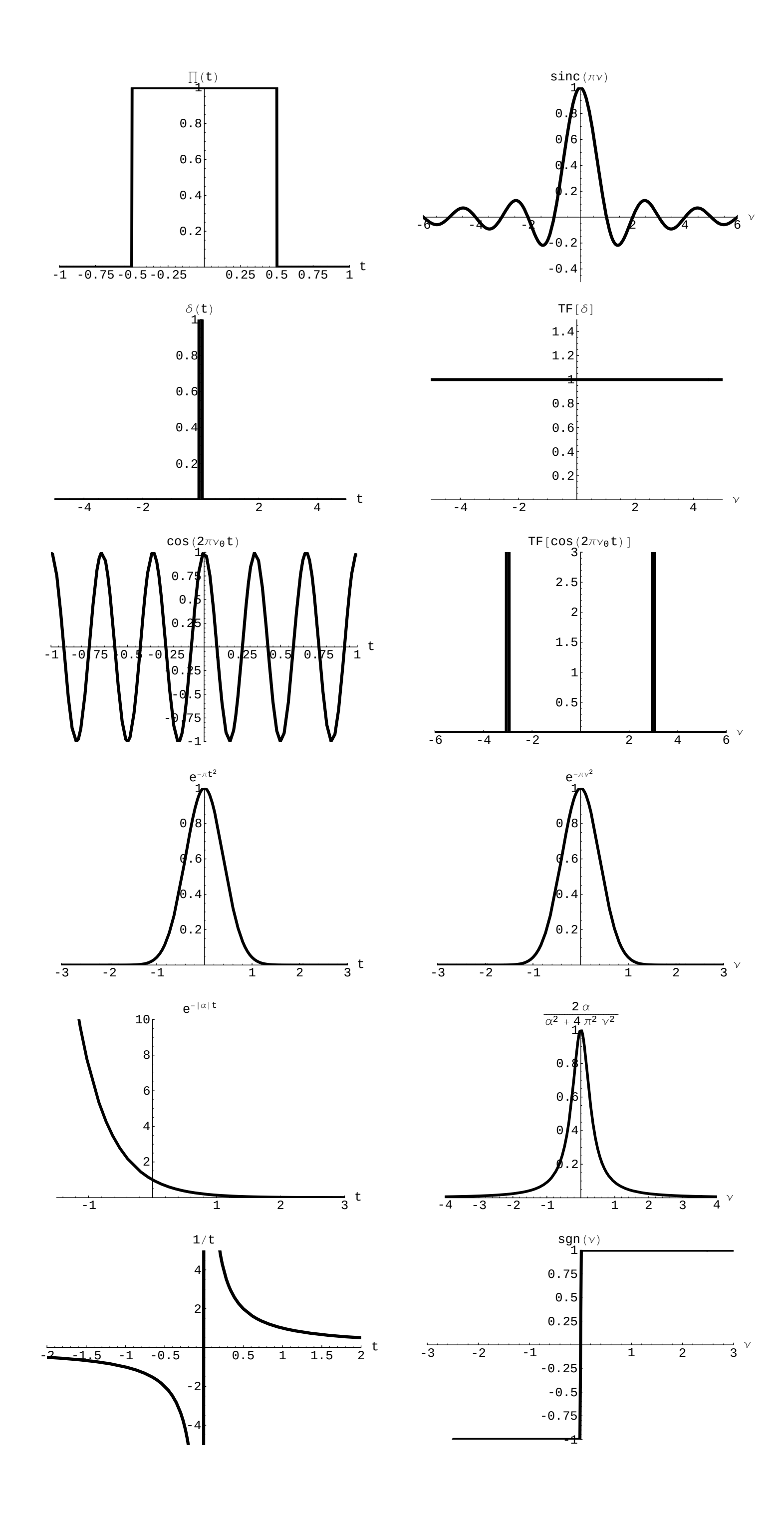
la distribution valeur principale est définie par

$$\forall f \in L^2, \quad \langle \mathrm{vp}[\frac{1}{t}] | f \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{]-\infty,-\epsilon[\cup]+\epsilon,+\infty[} \frac{f(t)}{t} dt$$

$$\Longleftrightarrow \ \mathrm{vp}[\frac{1}{t}] = \mathrm{w}\text{-}\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{t}(1 - \Pi(\frac{t}{2\epsilon}))$$

et la fonction de Heaviside est définie par

$$\mathbb{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ +1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$



2.5 Transformée de Fourier d'un signal spatial

Un signal spatial $(x, y) \mapsto f(x, y)$ ((x, y) en m) comme une image possède aussi une représentation en fréquences spatiales (ν_x, ν_y) (en m^{-1}). Dans ce cas la transformée de Fourier est

$$\mathrm{TF}[f](\nu_x, \nu_y) = \hat{f}(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-\imath 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy$$

Les propriétés sont alors les mêmes que pour un signal temporel.

Chapitre 3

Traitement du signal : convolution, filtrage et fonctions de transfert

Dans ce chapitre, on s'intéresse au traitement des signaux par un système analogique ou à l'effet qu'un système intermédiaire a sur un signal :
signal d'entrée $\longrightarrow$ système traitant le signal $\longrightarrow$ signal de sortie

exemple : signal électrique $\longrightarrow$ haut-parleur $\longrightarrow$ signal acoustique
Dans cet exemple le système sert à convertir la nature physique du signal. Un tel système s'il était idéal n'affecterait pas le signal lui-même (mais seulement son support physique) ; mais dans la réalité, les systèmes de restitution modifient le signal à cause de leurs imperfections et de leurs limitations physiques. Dans ce cas le traitement du signal est en fait une altération du signal par le système.
Mais dans d'autres exemples, la modification du signal par le système est le but recherché :
exemple 2 : une guitare électrique,
signal électro-acoustique issu des cordes $\longrightarrow$ pédale de distorsion $\longrightarrow$ signal distordu

Il va donc s'agir de modéliser mathématiquement l'effet d'un système de traitement du signal par un opérateur H :

$$f_{in}(t) \xrightarrow{H} f_{out}(t)$$

ou dans sa représentation en fréquence :

$$\hat{f}_{in}(\nu) \xrightarrow{\hat{H}} \hat{f}_{out}(\nu)$$

3.1 Filtrage et fonctions de transfert

Considérons un signal d'entrée $\nu \mapsto \hat{f}_{in}(\nu)$ dans un système qui va avoir pour effet de ne conserver que les fréquences se trouvant entre $[\nu_0 - \Delta\nu, \nu_0 + \Delta\nu]$ (c'est par exemple le cas en téléphonie, on ne conserve que les fréquences médiums — les mieux perçues par l'oreille — afin de limiter la quantité d'informations à transmettre), on a alors

$$\hat{f}_{in}(\nu) \xrightarrow{\hat{H}} \hat{f}_{out}(\nu) = \begin{cases} \hat{f}_{in}(\nu) & \text{si } \nu \in [\nu_0 - \Delta\nu, \nu_0 + \Delta\nu] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une telle opération s'appelle un filtrage. On voit que dans ce cas, l'opération consistant à ne conserver que certaines fréquences peut être écrite comme suit :

$$\hat{f}_{out}(\nu) = \hat{f}_{in}(\nu)\Pi\left(\frac{\nu - \nu_0}{2\Delta\nu}\right)$$

L'opérateur consiste donc à multiplier le signal d'entrée par la fonction porte $\nu \mapsto \Pi((\nu - \nu_0)/(2\Delta\nu))$. D'une manière générale, un filtrage peut au lieu de supprimer certaines fréquences, se contenter des les atténuer. De même certaines fréquences pourraient être amplifiées. Ainsi, on a dans l'espace des fréquences :

Définition 7. *L'action d'un système de filtrage sur un signal représenté en fréquence est donnée par la multiplication du signal d'entrée par une fonction* $\nu \mapsto \hat{H}(\nu) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, d\nu)$ *:*

$$\hat{f}_{out}(\nu) = \hat{f}_{in}(\nu)\hat{H}(\nu)$$

La fonction $\hat{H}$ *est appelée fonction de transfert.*

Un exemple intéressant de fonction de transfert est celui du filtre passe-bas :

$$\hat{H}(\nu) = \Pi\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)$$

Ce filtre supprime toutes les fréquences au dessus de ν_c (ν_c est appelé fréquence de coupure du filtre). On reviendra sur cet exemple plus tard car il pose des problèmes physiques.

3.2 Produit de convolution

On a vu comment est modélisé le traitement d'un signal dans sa représentation en fréquences. On s'intéresse maintenant à la représentation en temps d'un traitement du signal. On sait que le passage d'une représentation à une autre se fait à l'aide de la transformée de Fourier. On montre le résultat suivant :

Théorème 3. *Soient* $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}, d\nu)$*, alors*

$$\mathrm{TF}^{-1}[\hat{f}\hat{g}](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(t-\xi)d\xi$$

où $f = \mathrm{TF}^{-1}[\hat{f}]$ *et* $g = \mathrm{TF}^{-1}[\hat{g}]$.

Définition 8. *On appelle produit de convolution, la loi de composition* $* : L^2 \times L^2 \to L^2$ *définie par*

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(t-\xi)d\xi$$

On a donc

$$\mathrm{TF}[f * g](\nu) = \hat{f}(\nu)\hat{g}(\nu) \qquad \mathrm{TF}^{-1}[\hat{f}\hat{g}](t) = f(t) * g(t)$$

On a donc pour le traitement du signal :

$$\hat{f}_{out}(\nu) = f_{in}(\nu)\hat{H}(\nu)$$

$$\begin{aligned} f_{out}(t) &= \mathrm{TF}^{-1}[\hat{f}_{out}](t) \\ &= \mathrm{TF}^{-1}[\hat{f}_{in}\hat{H}](t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{in}(\xi)H(t-\xi)d\xi \\ &= f_{in}(t) * H(t) \end{aligned}$$

où H est transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert. On a donc

Définition 9. *L'action d'un système de traitement du signal représenté en temps est donnée par le produit de convolution du signal d'entrée par une fonction* $t \mapsto H(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, dt)$ *:*

$$f_{out}(t) = f_{in}(t) * H(t)$$

La fonction H *est appelée réponse impulsionnelle du système.*

On appelle H réponse impulsionnelle car la distribution de Dirac (une impulsion temporelle) est l'élément neutre du produit de convolution :

$$\delta(t) * H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)H(t-\xi)d\xi = H(t)$$

Ainsi si le signal en entrée est une impulsion $f_{in}(t) = \delta(t)$, le signal de sortie sera la réponse impulsionnelle $\psi_{out}(t) = H(t)$.

3.3 Propriétés du produit de convolution

- Élément neutre :

$$\forall f \in L^2 \qquad f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = f(t)$$

- Commutativité :

$$\forall f, g \in L^2 \qquad f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

- Associativité :

$$\forall f, g, h \in L^2 \qquad f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t) = f(t) * g(t) * h(t)$$

- Linéarité :

$$\forall f, g \in L^2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad f(t) * (\alpha g(t) + \beta h(t)) = \alpha f(t) * g(t) + \beta f(t) * h(t)$$

3.4 Le problème de la causalité

Reprenons l'exemple du filtre passe-bas parfait, sa fonction de transfert est

$$\hat{H}(\nu) = \Pi\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)$$

On a donc pour réponse impulsionnelle :

$$H(t) = \mathrm{TF}^{-1}[\hat{H}](t) = \frac{\sin(2\pi\nu_c t)}{\pi t}$$

D'où, si $f_{in}(t) = \delta(t)$, $f_{out}(t) = \frac{\sin(2\pi\nu_c t)}{\pi t}$. Donc $f_{out}(t) \neq 0$ pour $t < 0$, on reçoit le signal avant que celui-ci n'ait été émis ! Afin de ne pas violer le principe de causalité, un filtre temps réel doit donc vérifier $H(t) = 0$, $\forall t < 0$. Il faut donc veiller à ce que

$$H(t) = H_0(t)\mathbb{H}(t)$$

où H_0 est une réponse impulsionnelle quelconque. On a alors

$$\begin{aligned}\hat{H}(\nu) &= \frac{1}{2}\hat{H}_0(\nu) - \frac{\imath}{2\pi} H_0(\nu) * \mathrm{vp}[\frac{1}{\nu}] \\ &= \frac{1}{2}\hat{H}_0(\nu) - \frac{\imath}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]} \frac{H_0(\xi)}{\xi - \nu} d\xi\end{aligned}$$

3.5 Corrélation

On rappelle que la densité spectrale d'énergie d'un signal f est donnée par

$$S_f(\nu) = |\hat{f}(\nu)|^2$$

On s'intéresse à l'équivalent de la DSE dans l'espace du temps :

$$R_f(t) = \mathrm{TF}^{-1}[S_f](t) = f(t) * \overline{f(-t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\overline{f(\xi - t)} d\xi$$

Définition 10. *La fonction $R_f = f * \overline{f^T}$ est appelée fonction d'autocorrélation de f.*

$$R_f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|^2 d\xi = \mathcal{E}_f$$

en 0 la fonction d'autocorrélation est l'énergie totale du signal. Supposons que f soit T-périodique, alors

$$\begin{aligned} \frac{R_f(T)}{\mathcal{E}_f} &= \frac{1}{\mathcal{E}_f}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\overline{f(\xi-T)}d\xi \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}_f}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\overline{f(\xi)}d\xi \\ &= 1 \end{aligned}$$

$R_f(T)/R_f(0) = 1$ traduit le fait que $f(t-T) = f(t)\ \forall t$. En fait la fonction d'autocorrélation normée $t \mapsto R_f(t)/R_f(0)$ mesure la ressemblance du signal originel avec le signal translaté dans le temps d'une durée t (retardé de t si $t > 0$ ou avancé de $|t|$ si $t < 0$). $R_f(t)/R_f(0) \leq 1$, $= 1$ si le signal translaté est égale au signal originel. R_f permet donc de repérer la régularité d'un signal, des motifs répétés, etc... Elle est particulièrement utile pour repérer régularités et motifs dans un signal très bruité.

On peut généraliser en cherchant à étudier la ressemblance entre deux signaux quelconques :

Définition 11. *Soient, $f, g \in L^2$ deux signaux. On appelle fonction d'intercorrélation des signaux f et g la fonction*

$$R_{fg}(t) = f(t) * \overline{g(-t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\overline{g(\xi-t)}d\xi$$

Dans ce cas si le signal g est en fait le signal f retardé d'un laps de temps T, on aura

$$\frac{R_{fg}(T)}{\sqrt{R_f(0)R_g(0)}} = 1$$

La fonction d'intercorrélation normée $R_{fg}(t)/\sqrt{R_f(0)R_g(0)}$ permet de mesurer la ressemblance de deux signaux. En particulier, f et g se ressemblent le plus lorsque g est translaté du laps de temps T tel que $R_{fg}(T)/\sqrt{R_f(0)R_g(0)}$ soit maximal.

3.6 Exemples de traitement du signal

3.6.1 Moyenne glissante

Il s'agit de la réponse impulsionnelle :

$$H(t) = \Pi(\alpha t), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

et donc de la fonction de transfert

$$\hat{H}(\nu) = \frac{\sin(\frac{\pi\nu}{\alpha})}{\pi\nu}$$

$$\begin{aligned} f_{out}(t) &= f_{in}(t) * H(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{in}(t)\Pi(\alpha t - \alpha\xi)d\xi \\ &= \int_{t-\frac{1}{2\alpha}}^{t+\frac{1}{2\alpha}} f_{in}(\xi)d\xi \end{aligned}$$

Cette transformation qui moyenne le signal autour de chaque point t sur une fenêtre de $\pm\frac{1}{2\alpha}$, “lisse” le signal en supprimant les variations qui se déroulent sur une durée inférieure à $\frac{1}{\alpha}$.

3.6.2 Optique de Fourier

Un système d'imagerie peut être représenté par une fonction de transfert $\hat{H}(\nu_x, \nu_y)$. Ainsi une image à travers un système optique vérifie :

$$I_{out}(x,y) = I_{in}(x,y) * H(x,y)$$

$$\iff \hat{I}_{out}(\nu_x, \nu_y) = \hat{I}_{in}(\nu_x, \nu_y)\hat{H}(\nu_x, \nu_y)$$

On montre qu'en éclairage cohérent, l'amplitude de la tache de diffraction est la TF inverse de la pupille. Pour un objet ponctuel en position (x_0, y_0) vue à travers une lentille, on a

$$I_{in}(x, y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$$

$$\hat{H}(\nu_x, \nu_y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}}{\nu_c}\right)$$

où

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\nu_c = \frac{\sin(\theta_{max})}{\gamma\lambda}$$

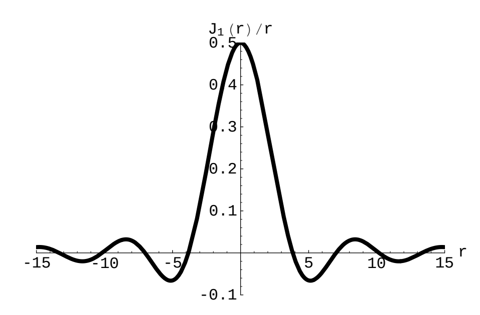
θ_{max} étant l'angle que fait le rayon issu de l'objet parallèle l'axe optique avec le rayon le plus incliné issu de l'objet et passant à travers la lentille ; λ est la longueur d'onde du rayon lumineux issu de l'objet, γ est le grandissement de la lentille.

$$H(x, y) = \text{TF}^{-1}[\hat{H}](x, y) = \frac{J_1(2\pi\sqrt{x^2 + y^2}\nu_c)}{\sqrt{x^2 + y^2}\nu_c}$$

où $J_1(z)$ est la première fonction de Bessel.
D'où

$$I_{out}(x, y) = (\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)) * H(x, y) = \frac{J_1(2\pi\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\nu_c)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\nu_c}$$

Tache de diffraction = tache d'Airy



Chapitre 4

Échantillonnage

4.1 Principe de l'échantillonnage

Considérons $f \in L^2(\mathbb{R}, dt)$ un signal. Il s'agit d'une fonction continue (ou presque partout continue) du temps que l'on ne peut pas représenter telle quelle en informatique (que ce soit pour générer le signal par un programme informatique ou pour acquérir numériquement un signal analogique). Il va donc falloir représenter numériquement (par une suite de nombre) le signal, c'est ce que l'on appelle un signal échantillonné. On ne va donc conserver le signal qu'à des instants particuliers (ou à des positions particulières si c'est un signal spatial) $\{..., t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, ...\}$. Cette suite de points est appelée échantillonnage. Pour simplifier, on va supposer que l'échantillonnage est périodique et introduire T_e la période d'échantillonnage $t_k = kT_e$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$, on pose de plus la référence à $t_0 = 0$). Le signal échantillonné est donc la suite $(f(kT_e), k \in \mathbb{Z})$, que l'on peut représenter par la distribution

$$f_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - kT_e) = \frac{1}{T_e} f(t) \sqcup\!\sqcup \left(\frac{t}{T_e}\right)$$

où $\sqcup\!\sqcup$ est la distribution peigne de Dirac :

$$\sqcup\!\sqcup (t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k)$$

4.2 Représentation en fréquences d'un signal échantillonné

Soit $f \in L^2$ un signal analogique, f_e son échantillonnage et T_e la période d'échantillonnage. La représentation en fréquence du signal échantillonnée est donné par[1]

$$\begin{aligned}
\hat{f}_e(\nu) &= \mathrm{TF}[f_e](\nu) \\
&= \frac{1}{T}\mathrm{TF}[f_e \sqcup\!\sqcup(./T_e)](\nu) \\
&= \hat{f}(\nu) * \sqcup\!\sqcup (T_e\nu) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) * \delta(T_e\nu - k) \\
&= \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) * \delta(\nu - \frac{k}{T_e})
\end{aligned}$$

Ainsi la représentation en fréquences d'un signal échantillonné en temps est un spectre périodique, la période spectral étant $\nu_e = \frac{1}{T_e}$.

[1] $\mathrm{TF}[\sqcup\!\sqcup] = \sqcup\!\sqcup$

Théorème 4 (Théorème de Shannon)**.** *Soit f un signal analogique dont la représentation en fréquence $\hat{f}$ est à support borné. Pour convertir ce signal analogique en un signal numérique sans perte d'information, il faut que la fréquence d'échantillonnage $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ soit au minimum double de la fréquence de coupure ν_c de $\hat{f}$. La fréquence de coupure étant définie comme le plus petit réel positif ν_c tel que $\hat{f}(\nu) = 0$ si $\nu > \nu_c$ et si $\nu < -\nu_c$.*

Ceci découle de la représentation en fréquence d'un signal échantillonné :

$$\hat{f}_e(\nu) = \nu_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) * \delta(\nu - k\nu_e)$$

Ainsi le motif de $\hat{f}(\nu)$ (qui est de taille $2\nu_c$) est reproduit périodiquement par translation de ν_e sur l'axe des fréquences.

- si $\nu_e > 2\nu_c$ il y a un "vide" entre la répétition des motifs, on a un sur-échantillonnage.
- si $\nu_e = 2\nu_c$ les motifs s'enchaînent directement les uns après les autres, on a un échantillonnage critique.
- si $\nu_e < 2\nu_c$ les motifs vont se superposer, la superposition des motifs sur les zones de recouvrement de la répétition va produire des "interférences" spectrales, $\hat{f}$ ne sera plus correctement extractible de $\hat{f}_e$, on a donc perdu de l'information. On a un sous-échantillonnage (repliement spectral, encore appelé recouvrement spectral).

Dans la pratique, on ne peut pas échantillonné un signal avec un nombre infini d'échantillons. Soit $N \in \mathbb{N}$ le nombre d'échantillons effectivement utilisés. On a alors

$$f_e(t) = f(t) \sqcup\!\sqcup(\nu_e t)\Pi\left(\frac{\nu_e t}{N}\right)$$

d'où

$$\hat{f}_e(\nu) = \hat{f}(\nu) * \sqcup\!\sqcup(T_e\nu) * \frac{\sin(\pi N T_e \nu)}{\pi\nu}$$

Un échantillonnage fini provoque donc une atténuation des fréquences aux bords des motifs $\hat{f}$ (on suppose toujours que celle-ci est bornée), atténuation qui peut porter sur très grande part du motif si le nombre d'échantillons est faible.

4.3 Échantillonnage réaliste : échantillonneur-intégrateur

Considérons un signal analogique f porté par un support physique (ondes acoustiques, ondes électriques,...) que l'on cherche à numériser. On doit donc disposer d'un système d'acquisition du signal. Physiquement, il est impossible de fabriquer un tel système qui soit capable de mesurer instantanément la valeur du signal analogique. Autrement dit, il est impossible de construire un système physique dont la réponse impulsionnelle soit δ, mais seulement des systèmes qui intègrent le signal sur une fenêtre temporelle avec la pondération d'une réponse impulsionelle H.
Le signal échantillonné est alors

$$f_e(t) = \nu_e \left(f(t) * H(t)\right) \sqcup\!\sqcup(\nu_e t)$$

On a donc dans le domaine spectral

$$\hat{f}_e(\nu) = \sqcup\!\sqcup(T_e\nu) * (\hat{f}(\nu)\hat{H}(\nu))$$

C'est donc le motif de $\hat{f}$ modulé par la fonction transfert du système d'acquisition qui se répète.
Exemple : si le système intègre le signal sur une fenêtre temporelle τ, on a

$$H(t) = \frac{1}{\tau}\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

et donc

$$\hat{H}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu\tau}$$

Les fréquences aux bords des motifs $\hat{f}$ sont atténués.

4.4 Quantification d'un signal

Une autre façon de représenter numériquement un signal, et d'approcher la fonction $t \mapsto f(t)$ par une fonction en escaliers, c'est la quantification. Soit $q \geq 0$ le pas de quantification, la version quantifiée de f est $f_q(t)$ telle que $f_q(t) = nq$ si $(n-1/2)q \leq f(t) < (n+1/2)q$.

4.5 Transformée Fourier discrète

Afin d'analyser un signal numérique, on a besoin de pouvoir réaliser numériquement un transformée de Fourier.
Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, dt)$ un signal analogique à support borné. Par définition, on a

$$f_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

Or comme le support du signal est borné, il existe T_c tel que $\forall t > T_c$ et $\forall t < -T_c$, $f(t) = 0$. Donc l'expression précédente se réduit à

$$f_e(t) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} f(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

où N est le nombre de points d'échantillonnage dans le support de f :

$$N = \left\lceil \frac{2T_c}{T_e} \right\rceil$$

On a donc pour la représentation en fréquences :

$$\begin{aligned}
\hat{f}_e(\nu) &= \sum_{k=-N/2}^{+N/2} f(kT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-\imath 2\pi\nu t} dt \\
&= \sum_{k=-N/2}^{+N/2} f(kT_e) e^{-\imath 2\pi k\nu T_e}
\end{aligned}$$

Pour que la définition de la transformée de Fourier discrète d'un signal numérique concorde avec l'échantillonnage de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné, on pose :

Définition 12 (Transformée de Fourier Discrète)**.** *Soit $f(t) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} f_k \delta(t - kT_e)$ un signal numérique. La transformée de Fourier discrète de ce signal est*

$$\hat{f}(\nu) = \sum_{m=-N/2}^{+N/2} \hat{f}_m \delta(\nu - m\nu_e)$$

$$\hat{f}_m = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} f_k e^{-\imath 2\pi mk/N}$$

La période de l'échantillonnage de la transformée de Fourier qui a été choisi est $p = \frac{\nu_e}{N}$ ce qui assure de ne pas perdre d'information sur le signal temporel.
Si $\hat{f}$ est un signal numérique en fréquence, sa transformée de Fourier discrète inverse est

$$f(t) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2} f_n \delta(t - nT_e)$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k e^{\imath 2\pi nk/N}$$

L'échantillonnage du spectre induisant une périodicité du signal discrétisé (réciproque du fait que l'échantillonnage du signal induit une périodicité dans le spectre), on peut translater le calcul des transformées de Fourier discrètes :

$$\hat{f}_m = \sum_{k=0}^{+N} f_k e^{-\imath 2\pi mk/N}$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \hat{f}_k e^{\imath 2\pi nk/N}$$

il faut juste alors faire attention que les fréquences d'indices supérieurs à $N/2$ correspondent aux fréquences négatives (important pour le filtrage).
Dans la pratique, le calcul d'une transformée de Fourier discrète n'est pas aisée à cause de la somme sur le nombre de points d'échantillonnage qui peut prendre beaucoup de temps. Pour résoudre ce problème, on utilise numériquement des algorithmes dits de Transformées de Fourier Rapides (FFT).